Københavns Universitets Økonomiske Institut

2. årsprøve 2018 V-2DM rx ret

Rettevejledning til skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Mandag den 19. februar 2018

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 - z^3 - z^2 - z - 2.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} - \frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} - \frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 16e^t,$$

samt differentialligningen

$$(***) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} - \frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 4t^3 - 13.$$

(1) Vis, at tallet $z = i$ er rod i polynomiet P. Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet P.

Løsning. Ved indsættelse i ligningen ser vi, at $P(i) = 0$. Da polynomiet $P \in \mathbf{R}[z]$, ved vi, at også tallet $z = -i$ er en rod i P. Da vil polynomiet $\tilde{P}(z) = (z-i)(z+i) = z^2+1$ være divisor i P, og vi finder, at

$$P(z) = (z^2 - z - 2)(z^2 + 1) = (z + 1)(z - 2)(z^2 + 1),$$

hvoraf det fremgår, at polynomiet P har rødderne $z = -1, z = 2, z = i$ og $z = -i$.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi finder straks, at

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + c_3\cos t + c_4\sin t, \ \text{ hvor } \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. En speciel løsning til differentialligningen $(**)$ er af formen $\hat{x} = Ae^t$. Ved indsættelse i denne differentialligning får vi, at $A = -4$, så man har altså, at

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + c_3\cos t + c_4\sin t - 4e^t, \ \text{ hvor } \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(* * *)$.

Løsning. Vi gætter på en speciel løsning af formen

$$x^* = At^3 + Bt^2 + Ct + D,$$

og ved indsættelse finder vi, at $A = -2, B = 3, C = 3$ og $D = 8$, så vi opnår, at

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + c_3\cos t + c_4\sin t - 2t^3 + 3t^2 + 3t + 8, \ \text{ hvor } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

For ethvert $s \in \mathbf{R}$ betragter vi den homogene, lineære differentialligning

$$(* * **) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + sx = 0,$$

(5) Opstil Routh-Hurwitz matricen $A_4(s)$ for differentialligningen $(* * **)$, og bestem de $s \in \mathbf{R}$, hvor $(* * **)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Routh-Hurwitz matricen for den pågældende differentialligning er

$$A_4(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & s & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & s \end{pmatrix}.$$

De ledende hovedunderdeterminanter for denne matrix er $D_1 = 1, D_2 = 1, D_3 = 1-s$ og $D_4 = s(1-s)$. Hvis alle disse ledende hovedunderdeterminanter skal være positive, må vi kræve, at $0 < s < 1$. Eller anderledes skrevet, at $s \in]0, 1[$.

Opgave 2. Vi betragter korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$F(x) = \begin{cases} [1, 2], & \text{for } x < 0 \\ [-3, 3], & \text{for } 0 \le x \le 3 \\ [0, 1], & \text{for } x > 3 \end{cases} .$$

og den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2 x.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet graf egenskaben, at den ikke er nedad hemikontinuert, men at den er opad hemikontinuert.

Løsning. Det er klart, at grafen for korrespondancen F er afsluttet i mængden $\mathbf{R}^2$, så F har afsluttet graf egenskaben. Lad os nu betragte en følge (x_k), hvor ethvert følgeelement $x_k < 0$. Og lad os antage, at $(x_k) \to 0$. Der findes da ingen konvergent følge (y_k), så $y_k \in F(x_k) = [1, 2]$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$, og således at grænsepunktet for (y_k) er $y = 3 \in F(0)$. Altså er korrespondancen F ikke nedad hemikontinuert. Da F har afsluttet graf egenskaben, og da alle mængderne $F(x)$ er afsluttede delmængder af den kompakte mængde $[-3, 3]$, er korrespondancen F opad hemikontinuert.

(2) Bestem fixpunkterne for korrespondancen F.

Altså de punkter $x^* \in \mathbf{R}$, hvorom det gælder, at $x^* \in F(x^*)$.

Løsning. Vi ser, at fixpunkterne for korrespondancen F er alle punkter $x^* \in [0, 3]$, thi for netop disse punkter gælder det, at $x^* \in F(x*^)$.

(3) Bestem en forskrift for den maksimale værdifunktion $v_u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : v_u(x) = \max\{f(x, y) \mid y \in F(x)\}.$$

Løsning. Vi ser, at

$$v_u(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{for } x < 0, \text{ hvor } y = 1 \\ 0, & \text{for } x = 0, \text{ hvor } y \in [-3, 3] \\ x^2 + 9x, & \text{for } 0 < x \leq 3, \text{ hvor } y = \pm 3 \\ x^2 + x, & \text{for } x > 3, \text{ hvor } y = 1 \end{cases}.$$

(4) Bestem en forskrift for den maksimale værdikorrespondance $M_u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : M_u(x) = \{y \in F(x) \mid f(x, y) = v_u(x)\}.$$

Løsning. Vi ser umiddelbart, at

$$M_u(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{for } x < 0 \\ [-3, 3], & \text{for } x = 0 \\ \{-3, 3\}, & \text{for } 0 < x \leq 3 \\ \{1\}, & \text{for } x > 3 \end{cases}.$$

(5) Vis, at den maksimale værdikorrespondance M_u ikke har afsluttet graf egenskaben, at den ikke er nedad hemikontinuert, og at den ikke er opad hemikontinuert.

Løsning. Grafen for korrespondancen M_u er ikke afsluttet, så den har ikke afsluttet graf egenskaben. Lad os nu betragte en følge (x_k), hvor ethvert følgeelement $x_k < 0$. Og lad os antage, at $(x_k) \to 0$. Der findes da ingen konvergent følge (y_k), så $y_k \in M_u(x_k) = \{1\}$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$, og således at grænsepunktet for (y_k) er $y = 3 \in M_u(0)$. Altså er korrespondancen M_u ikke nedad hemikontinuert. Det ses også, at vi kan vælge en åben omegn U omkring $M_u(3) = \{-3, 3\}$, sådan at $M_u(x)$, for $x > 0$ ikke er en delmængde af U. Dette viser, at M_u ikke er opad hemikontinuert.

(6) Bestem evt. fixpunkter for den maksimale værdikorrespondance M_u.

Løsning. Korrespondancen M_u har punkterne 0 og 3 som sine fixpunkter.

Opgave 3. Vi betragter vektordifferentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{dx}{dt} = Ax,$$

hvor $x \in \mathbf{R}^3$ og

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (§).

Løsning. Matricen A har det karakteristiske polynomimn

$$P(t) = ((3-t)^2 - 4)(7-t),$$

og de karalteristiske rødder er derfor $t_1 = 1, t_2 = 5$ og $t_3 = 7$. Disse rødder er egenværdierne for matricen A. Herefter ser vi, at A har egenrummene

$$V(1) = N(A-E) = \text{span}\{(-1,1,0)\},\ V(5) = N(A-5E) = \text{span}\{(1,1,0)\}$$

og

$$V(5) = N(A-7E) = \text{span}\{(0,0,1)\}.$$

Herefter finder vi, at

$$x = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{7t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(2) Opskriv fundamentalmatricen $\Phi(t)$ for vektordifferentialligningen (§).

Løsning. Vi får, at

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^t & e^{5t} & 0 \\ e^t & e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix}.$$

(3) Bestem resolventen $R(t, 0)$ for vektordifferentiallignigen (§), idet udgangspunktet er $t_0 = 0$.

Løsning. Vi finder, at

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } (\Phi(0))^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

så

$$R(t, 0) = \Phi(t)(\Phi(0))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{5t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{5t} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{5t} & \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{tt} \end{pmatrix}.$$

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^{\sqrt{2}} \left(2u^2 + x^2 + x\right) dt,$$

hvor $x(0) = -\frac{1}{2}$, $x(\sqrt{2}) = e^2 - \frac{1}{2}$ og $\dot{x} = f(t, x, u) = 2u$.

Vi skal løse dette optimale kontrolproblem, hvor man altså har, at

$$F(t, x, u) = 2u^2 + x^2 + x.$$

(1) Opskriv Hamiltonfunktionen $H = H(t, x, u, p)$ for dette optimale kontrolproblem.

Løsning. Hamiltonfunktionen er givet ved udtrykket

$$H = H(t, x, u, p) = 2u^2 + x^2 + x + 2pu.$$

(2) Afgør, om dette optimale kontrolproblemet er et maksimums- eller et minimumsproblem.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2x + 1 = -\dot{p} \text{ og } \frac{\partial H}{\partial u} = 4u + 2p = 0.$$

Hessematricen for funktionen $H(x, u)$ er

$$H'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dette viser, at der er tale om et optimalt minimumsproblem.

(3) Bestem det optimale par (x^*, u^*) for dette optimale kontrolproblem.

Løsning. Vi finder først, at $p = -2u = -\dot{x}$, så $2x + 1 = \ddot{x}$. Altså har vi, at $\ddot{x} - 2x = 1$. Det karakteristiske polynomium for den tilhørende homogene differentialligning er $P(\lambda) = \lambda^2 - 2$, som åbenbart har de karakteristiske rødder $\lambda = \pm\sqrt{2}$. En speciel løsning til den inhomogene differentialligning er en konstant, og vi ser, at denne konstant skal være $k = -\frac{1}{2}$.

Den fuldstændige løsning til den givne differentialligning er derfor givet ved udtrykket

$$x = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t} - \frac{1}{2}, \quad \text{hvor} \ \ A, B \in \mathbf{R}.$$

Da $x(0) = -\frac{1}{2}$, ser vi, at $B = -A$, så

$$x = A\Big(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\Big) - \frac{1}{2}, \quad \text{hvor} \ \ A \in \mathbf{R},$$

og idet $x(\sqrt{2}) = e^2 - \frac{1}{2}$, får vi, at $A = \frac{e^2}{e^2 - e^{-2}} = \frac{e^4}{e^4 - 1}$.

Dette viser, at

$$x^* = \frac{e^4}{e^4 - 1}\Big(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\Big) - \frac{1}{2},$$

og at

$$\dot{x}^* = \frac{\sqrt{2}e^4}{e^4 - 1}\Big(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\Big),$$

så

$$u^* = \frac{e^4}{\sqrt{2}(e^4 - 1)}\Big(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\Big).$$